Solution 15 :

1°/On a : $\int_1^n \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} = \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx$

or $\forall x \in [p, p+1]$ on a : $\frac{1}{p+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \le \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow U_n - 1 \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le U_n - \frac{1}{n}$

2°/a) On a : $\int_1^n \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^n = \ln n$

d'où $U_n - 1 \le \ln n \le U_n - \frac{1}{n} \Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \le U_n \le 1 + \ln n$

b) $\lim_{n\to+\infty} \ln n + \frac{1}{n} = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Solution 16 :

$1 + \frac{k}{n} \le x \le 1 + \frac{k+1}{n} \Rightarrow \ln(1 + \frac{k}{n}) \le \ln x \le \ln(1 + \frac{k+1}{n})$

car la fonction Log est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

En passant à l'intégrale on obtient :

$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1 + \frac{k}{n})\ dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\ dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1 + \frac{k+1}{n})\ dx$

$\Rightarrow \ln(1 + \frac{k}{n})\ [x]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\ dx \le \ln(1 + \frac{k+1}{n})\ [x]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$

d'où $\frac{1}{n}\ln(1 + \frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\ dx \le \frac{1}{n}\ln(1 + \frac{k+1}{n})$

2°/ a) On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $0 \le k \le n-1$: